Лекція 1

**Тема 1. Вступ до курсу «Чисельні методи програмування» (ЧМП). Основні поняття про чисельні методи в програмуванні**

1. **Вступ**

Сучасний розвиток науки та обчислювальної техніки характеризується все більш зростаючим рівнем використання комп'ютерних моделей як для дослідження поведінки явищ та процесів, що оточують людину, так і для розв'язання практичних задач, пов'язаних з управлінням та прогнозуванням.

Вивчення навчальної дисципліни «Чисельні методи програмування» дозволяє студентам оволодіти знаннями в галузі практичних методів рішення математичних проблем, що виникають у процесі інженерної діяльності та моделювання фізичних систем.

**Хмарний сервіс Google Colaboratory** (https://colab.research.google.com/)

**База знань і набір обчислювальних алгоритмів** Wolfram Alpha

(https://www.wolframalpha.com/)

**Хмарний сервіс Wolfram Cloud** (https://www.wolframcloud.com/)

**Матричний калькулятор Matrixcalc** (https://matrixcalc.org/uk/)

**Графічний калькулятор Desmos** (<https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>)

**Об'єктом** вивчення навчальної дисципліни є типові математичні задачі, до яких зводиться рішення практичних проблем, що виникають у ході розробки інформаційних систем та систем моделювання.

**Предметом** вивчення навчальної дисципліни є чисельні методи розв'язання типових математичних задач.

Розглянемо етапи розв'язання практичних задач:

1. Постановка задачі:

• словесне формулювання задачі;

• визначення кінцевої мети розв'язку.

2. Побудова математичної моделі, тобто математичне формулювання задачі.

3. Вибір чисельного методу для розв'язання математичної задачі.

4. Розроблення алгоритму.

5. Програмна реалізація алгоритму.

6. Тестування програми (налагодження на тестових задачах).

7. Проведення розрахунків на реальних даних.

8. Аналіз результатів.

Найскладнішим із перерахованих етапів є другий етап, а вивчення методів його реалізації є предметом інших навчальних дисциплін (наприклад, моделювання систем й ін.).

Далі будемо вважати, що математичне формулювання задачі вже є, потрібно тільки навчитися її розв'язувати на комп'ютері з використанням чисельних методів.

Варто зазначити, що якщо математична модель вибрана недостатньо коректно, то які б методи не застосовувалися для розрахунків з її використанням, отримані висновки будуть ненадійні, або й зовсім неправильні.

Розв'язок, отриманий за допомогою чисельного методу, зазвичай є наближеним, тобто містить деяку погрішність.

Джерелами погрішності (у порядку значимості) є:

• невідповідність математичної постановки задачі досліджувавному реальному явищу;

• погрішність початкових даних;

• погрішність чисельного методу розв'язання;

• помилки округлення та розрахунків.

У ході розв'язання конкретної практичної задачі необхідно визначити, до якого типу математичної задачі належить ця практична задача, вибрати чисельний метод для її розв'язання, розробити програмну реалізацію методу.

1. **Сутність чисельних методів. Загальні поняття.**

Для розв'язання математичних задач в основному існує три групи методів:

1. **Аналітичні методи**, в яких розв'язок задачі подається у вигляді аналітичних виразів. Їх перевагами є: запис розв'язку у загальному вигляді; висока точність і малий об'єм комп'ютерної пам'яті для зберігання розв'язку. Основний недолік – неуніверсальність, бо тільки невелика частина математичних задач може бути розв'язана аналітично.

2. **Графічні методи**, в яких розв'язок задачі знаходиться візуально. Їх перевагою є наочність. Недоліками графічних методів є: велика трудомісткість; низька точність (залежить від точності побудови графіків); неуніверсальність (графіки можна побудувати тільки для невеликої розмірності та ін.).

3. **Чисельні методи**, що дозволяють звести розв'язування задачі до виконання скінченного числа арифметичних і логічних дій з числами. При цьому розв'язок визначається як набір чисел, які надалі можуть бути інтерпретовані різним способом (наприклад, подані у вигляді таблиць, графіків, анімації тощо). Їх перевагами є: абсолютна універсальність, бо теоретично можуть бути застосовані для розв'язання будь-яких задач; добре пристосовані для реалізації на комп'ютері. Недоліком є велика трудомісткість у ході ручного рахунку, що, зазвичай, не є проблемою, оскільки вони призначені для використання на комп'ютері.

Таким чином, чисельні методи є основним апаратом розв'язання математичних задач, а їх значущість тільки збільшуватиметься у міру вдосконалення комп'ютерної техніки. Чисельні методи бувають двох типів: прямі та ітераційні.

В прямих методах розв'язок задачі досягається за скінченну кількість кроків методу після виконання останнього кроку, в ітераційних методах виконується ряд ітерацій методу до отримання наближеного розв'язку із заданою точністю.

**Поняття ітераційного методу.** В основному чисельні методи є ітераційними.

**Ітерація** – це повторення сукупності операцій або процедур для покращення наявного (поточного) наближеного розв'язку задачі.

Нехай – розв'язок задачі, тоді ітераційний метод будує так звану ітераційну послідовність , наближень розв'язку, при цьому повинно наближатися до зі збільшенням k .

Алгоритм **ітераційного методу** в найзагальнішому вигляді має таку схему:

1. Задається початкове наближення розв'язку (на основі апріорних знань про задачу).

2. На k -й ітерації методу (k = 0,1, 2…) буде поточне наближення розв'язку .

Далі обчислюється наступне наближення , де F і є сукупністю операцій або процедур для покращення наближеного розв'язку задачі, яка є суттю конкретного чисельного методу.

1. Перевіряється критерій останову, тобто перевіряється: чи є отримане наближення розв'язку достатньо близьким. Якщо цього немає, то відбувається перехід до наступної ітерації, тобто до пункту 2.
2. Варто зазначити, що вид критерію останову (тобто припинення обчислень за ітераційним методом) залежить від виду розв'язуваної математичної задачі.

3. **Наближене обчислення і похибка.**

Точність знайденого розв’язку залежить від багатьох факторів. При цьому слід уміти оцінити похибку обчисленого розв’язку.

**Джерела та класифікація похибок**

1. Похибка, пов’язана з самою постановкою задачі (похибка постановки задачі).

2. Похибка методу.

3. Похибка, пов’язана з обриванням нескінченних процесів (наприклад, ряду). *Називається залишковою похибкою.*

4. Похибка даних, які можуть бути визначені лише наближено.

*Називається початковою похибкою.*

5. Похибка округлення.

6. Похибка дій над наближеними числами.

**4.Абсолютна та відносна похибки**

Наближеним числом *a* називається число, що незначно відрізняється від точного числа *A* і яке заміняє його в обчисленнях.

Якщо *a < A*, то кажуть, що число *a* наближене значення числа *A* з недостачею, а якщо *a > A*, то з надлишком.

Різниця між точним числом *A* та його наближеним числом *a* називається похибкою.

Якщо *a < A*, то *A − a > 0*; якщо *a > A*, то *A −* *a < 0* . Як правило, у практиці масових обчислень знак похибки визначити важко, то користуються поняттям абсолютної похибки.

Абсолютна величина різниці *A* і a називається *абсолютною похибкою* наближеного числа *a* і позначається або *∆a*.

Тут може бути два випадки:

1) Точне число *A* відоме. Тоді абсолютна похибка легко знаходиться.

Приклад 1.

*A = 784,2737, a = 784,274.* Тоді

*∆ = |A − a |= |784,2737 – 784,274|, = 0,0003*.

2)Точне число *A* нам невідоме, тому абсолютну похибку обчислити неможливо. Тоді користуються поняттям границі абсолютної похибки, що задовольняє нерівність .

Під граничною абсолютною похибкою *∆a* наближеного числа розуміють всяке число, не менше абсолютної похибки цього числа.

Звідси маємо . Значення числа A записується так:

Приклад 2. Визначити граничну абсолютну похибку числа *a = 3,14*, що замінює число π. Якщо 3,14 < π < 3,15, то , .

Абсолютна похибка і гранична абсолютна похибка не дозволяють характеризувати точність вимірювання чи точність обчислень.

Приклад 3. При вимірюванні довжин двох стержнів одержали результати:

см, см.

Абсолютні похибки рівні.

Для оцінки якості вимірювання чи обчислення вводиться поняття відносної похибки.

Відносною похибкою *δa* наближеного числа *а* називається відношення абсолютної похибки цього числа до модуля відповідного точного числа

*A(A ≠ 0)*.

.

Граничною відносною похибкою наближеного числа називають всяке число, не менше відносної похибки цього числа

*.*

Оскільки , то .

Звідси, .

Приклад 4. Визначити граничну відносну похибку числа

*a = 35,148 ± 0,00074*